ĐỀ BÀI (trang 33)

Tính tích phân đường:

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$$

trong đó:
C là biên của miền D.
D nằm trong nửa trên mặt phẳng $y \geq 0$.
D nằm giữa hai đường tròn:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 = 4$$

Hướng của C tương thích với D (ngược chiều kim đồng hồ).

BƯỚC 1. Nhận diện vì sao gọi là "miền không đơn giản"

Miền D:
Không phải dạng:

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

Cũng không phải dạng:

$$c \leq y \leq d, \quad h(y) \leq x \leq k(y)$$

Vì:
- Miền bị khoét rỗng ở giữa (giữa 2 đường tròn). - Lại chỉ lấy nửa trên.
$\Rightarrow$ Không phải miền đơn giản theo x hay y.
Nhưng vẫn dùng được Green vì:
- Miền có thể chia thành hữu hạn miền đơn giản. - Hoặc đổi sang tọa độ cực (cách thông minh hơn).

BƯỚC 2. Xác định P và Q

So với dạng chuẩn:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Ta có:

$$P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = 3xy$$

BƯỚC 3. Viết công thức Green

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

BƯỚC 4. Tính đạo hàm riêng (làm chậm)

1. Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q(x,y) = 3xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y$$

2. Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P(x,y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

3. Lấy hiệu (linh hồn của Green):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3y - 2y = y$$

Toàn bộ bài toán rút gọn về:

$$\iint_D y\,dA$$

BƯỚC 5. Nhận diện miền D trong tọa độ cực

Miền D: - Giữa hai nửa hình tròn bán kính 1 và 2. - Nằm trên trục Ox.

Chuyển sang tọa độ cực:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Miền D trở thành:

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

Nhớ:

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

BƯỚC 6. Đổi tích phân sang tọa độ cực

Vì $y = r\sin\theta$, nên:

$$\iint_D y\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r\sin\theta) \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_1^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

BƯỚC 7. Tính tích phân – siêu chậm

Bước 7.1: Tách tích phân

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right) \left(\int_1^2 r^2\, dr\right)$$

Bước 7.2: Tính từng phần

a) Theo θ:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

b) Theo r:

$$\int_1^2 r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Bước 7.3: Nhân lại

$$2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \frac{14}{3}$$